

第3章 弾性率

目的 各種工業材料の弾性的性質について理解する。

- 3.1 剛性と弾性率
- 3.2 金属とセラミックス
 - 3.2.1 応力-ひずみ曲線
 - 3.2.2 ヤング率の誘導
 - 3.2.3 金属とセラミックスのヤング率の比較
- 3.3 ポリマー
 - 3.3.1 応力-ひずみ曲線
 - 3.3.2 温度とヤング率の関係
 - (1) ガラスプラトー (2) ガラス転移 (3) ゴムプラトー (4) 粘性流動
- 3.4 複合材料
 - 3.4.1 応力-ひずみ曲線
 - 3.4.2 複合則 (1) 連続繊維強化複合材料 (2) 粒子強化複合材料

- 3.5 ヤング率の比較
- 3.6 ケーススタディ
 - (1) 天体反射望遠鏡 (2) 究極の自転車フレーム
 - (3) タボリーノのテーブル (4) トラック用板ばね

3.1 剛性(rigidity)と弾性率(elastic constant)

剛性

- ・荷重 F に対する弾性変形量 $\delta(F/\delta)$
- ・弾性率と形状(面積 A , 断面2次モーメント I)により決定される。

※形状は材料力学の問題と考え、本講義では物性(弾性率, 特にヤング率)を対象とする。

弾性率

ヤング率(縦弾性係数)	$E = \sigma / \epsilon$
剛性率(せん断弾性係数)	$G = \tau / \epsilon_{xy}$
体積弾性係数	$K = \sigma_p / \epsilon_v$
ポアソン比	$\nu = -\epsilon_y / \epsilon_x$

等方性弾性体 独立な弾性係数は2個

$$E, \nu \rightarrow G = E / \{2(1 + \nu)\}, K = E / \{3(1 - 2\nu)\} \quad (1)$$

簡便な近似

$$\nu \doteq 1/3, G \doteq 3E/8, K \doteq E \quad (2)$$

3.2 金属とセラミックス

3.2.1 応力-ひずみ曲線

- ・破壊挙動は異なる→セラミックスは圧縮に強いが引張に弱い
- ・弾性挙動は同様であり、弾性域における応力とひずみの関係は線形

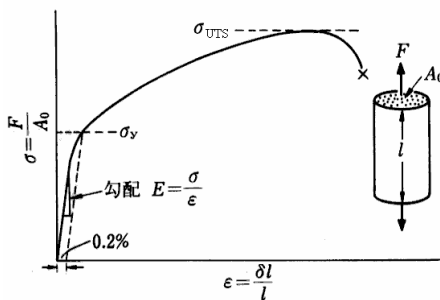


図3.1 金属の応力-ひずみ曲線

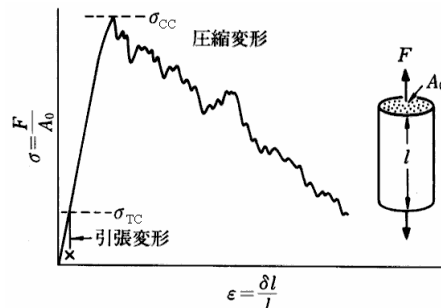


図3.2 セラミックスの応力-ひずみ曲線

3.2.2 ヤング率の誘導

原子間に作用する力は、式(3)のように原子結合に基づく引力 f_a と電子の干渉による斥力 f_r の和として与えられる。

$$f(r) = f_a + f_r = \frac{A}{r^m} - \frac{B}{r^n} \quad (m < n) \quad (3)$$

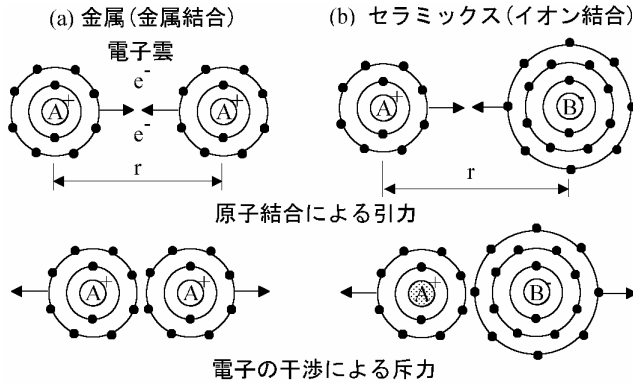


図3.3 原子間に働く引力と斥力

式(3)で、 m 、 n 、 A 、 B は原子の種類に依存する定数である。原子の釣り合い位置 $r=r_0$ では $f(r_0)=0$ である。よって式(3)より、

$$B = \frac{Ar_0^n}{r_0^m} \quad (4)$$

図3.5に示す単純な構造の結晶を考える。 $r_0 \times r_0$ の面に作用する応力は、

$$\sigma_x = \frac{4f(r)/4}{r_0^2} = \frac{f(r)}{r_0^2} \quad (5)$$

またひずみは、

$$\varepsilon_x = \frac{r - r_0}{r_0} \quad (6)$$

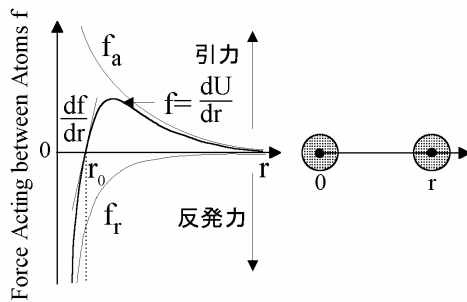


図3.4 原子間に働く力

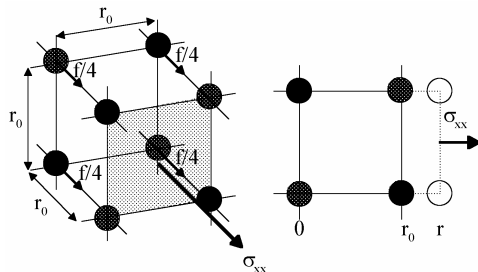


図3.5 引張応力を受ける結晶

$$\text{一方, ヤング率は, } E = \left(\frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x} \right)_{r=r_0} = \left(\frac{d\sigma_x}{dr} \frac{1}{d\varepsilon_x/dr} \right)_{r=r_0} \quad (7)$$

$$\text{式(5)より, } \frac{d\sigma_x}{dr} = \frac{1}{r_0^2} \frac{df}{dr} = \frac{1}{r_0^2} \left(-\frac{mA}{r^{m+1}} + \frac{nB}{r^{n+1}} \right) \quad (8)$$

$$\text{式(6)より, } \frac{d\varepsilon_x}{dr} = \frac{1}{r_0} \quad (9)$$

$$\text{式(4)および(7)~(9)より, } E = \frac{A(n-m)}{r_0^m} \quad (10)$$

- ・実際の単結晶について計算するには, 式(5)および(6)で格子と力が作用する方向を考慮する必要がある。
- ・多結晶体の場合, さらに各結晶粒の方位を考慮し, 平均的な値としてヤング率を求める必要がある。

↓

しかしながら, 定性的には原子間力とヤング率を関連づけて考えてよい。

3.2.3 金属とセラミックスのヤング率の比較

ポテンシャルエネルギー(potential energy)

原子を ∞ から r まで移動させるために必要な仕事である。式(3)の $f(r)$ を用いれば, ポテンシャルカーブ, すなわち r とポテンシャルエネルギー $U(r)$ の関係は,

$$U(r) = \int_{\infty}^r f(r) dr = -\frac{A}{(m-1)r^{m-1}} + \frac{B}{(n-1)r^{n-1}} \quad (11)$$

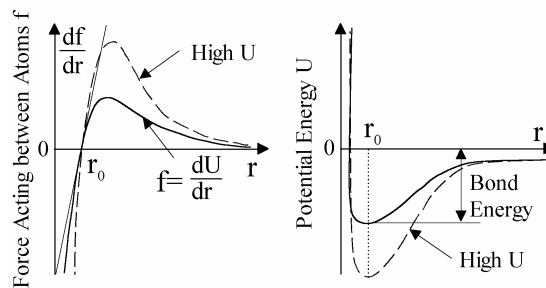


図3.6 ポテンシャルカーブと原子間に働く力の関係

式(11)の関係を図示すると、図3.6右のようになる。さらに式(4)を用いて、原子の釣り合い位置 $r=r_0$ での $U(r_0)$ 、すなわち原子間の結合エネルギー(bond energy)を求めれば、

$$U(r_0) = \frac{A(n-m)}{(m-1)(n-1)r_0^{m-1}} \quad (12)$$

イオン結合性、共有結合性の物質→高結合エネルギー

- ・ポテンシャルカーブが鋭い (m 値が小)
- ・ポテンシャルカーブの底が深い (n を一定とすると係数 $A(n-m)$ が大)



式(10)より、高 $E(r_0)$ 一定と仮定)

表3.1 結合様式と結合エネルギーおよびヤング率の関係

結合様式	物質	結合エネルギー(J/mol)	ヤング率(GPa)
イオン結合	Al ₂ O ₃	15100	340
共有結合	ダイヤモンド	712	775
	SiC	1186	430
金属結合	Cu	339	115
	Fe	406	210

定性的に結合様式(ポテンシャルカーブの形状)とヤング率の関係が説明された。

3.3 ポリマー

3.3.1 応力-ひずみ曲線

ガラス転移点(T_g , glass transition)

2次結合が溶け始める温度

ポリマーの挙動

規格化温度(T/T_g , normalized temperature)に依存

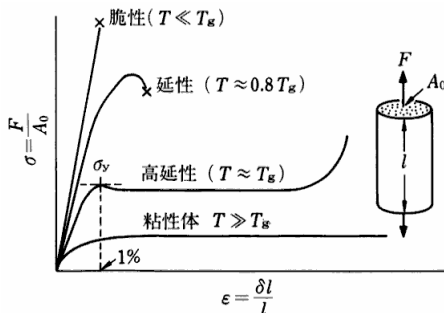


図3.7 ポリマーの応力-ひずみ曲線

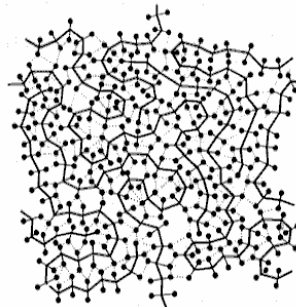


図3.8 線状非晶質ポリマー (点線:2次結合)

3.3.2 温度とヤング率の関係

図3.9に示すようにポリマーのヤング率は温度に強く依存する。

(1) ガラスプラトー ($T \ll T_g$)

ポリマー分子の共有結合と2次結合がヤング率を支配する領域

共有結合率 f

共有結合(ヤング率 E_1)が占める割合. 残り $(1-f)$ の領域は2次結合(ヤング率 E_2)が占める

応力 σ が作用し, ひずみ ε が生じたとすると,

$$\varepsilon = f \frac{\sigma}{E_1} + (1-f) \frac{\sigma}{E_2} \quad (13)$$

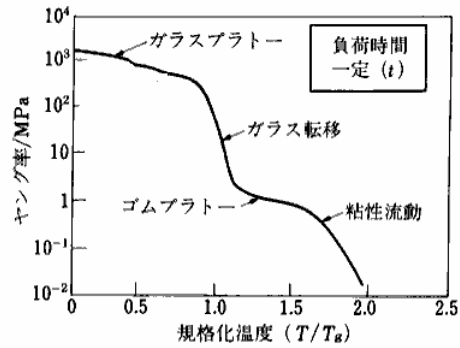


図3.9 規格化温度とヤング率の関係

共有結合 E_1	$E_1 = 1000 \text{ GPa}$ (ダイヤモンド)
2次結合 E_2	$E_2 = 1 \text{ GPa}$ (炭化水素)

とすると, 図3.10の様に, 共有結合率を用いて各ポリマーのヤング率を概算できる。

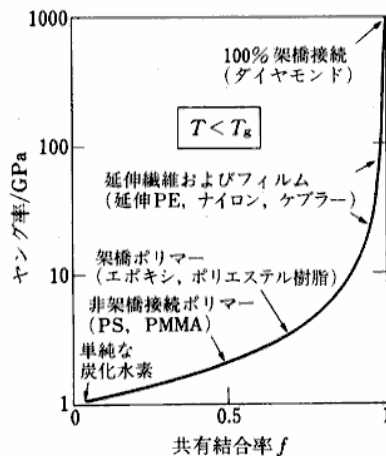


図3.10 共有結合率 f とヤング率の関係

(2) ガラス転移($T \approx T_g$)

2次結合が溶けてポリマー分子は互いにすべるため(図3.11(a)), ヤング率が急激に低下する.

(3) ゴムプラトー($T > T_g$)

ポリマー分子の絡み合いにより節目ができる(図3.11(b)). この場合, 負荷時には節目間の部分がすべるが, 除荷時には節目間の部分が再度戻る(ゴム弾性挙動).

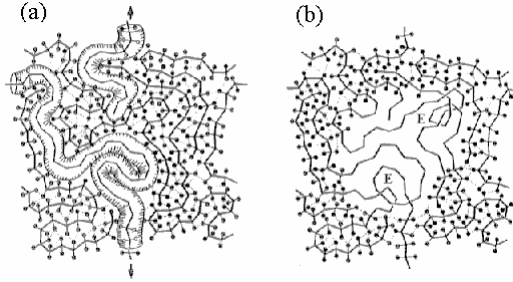


図3.11 (a) 2次結合が溶けた後のポリマー分子の挙動, (b) ポリマー分子の絡み合いによる節目の形成(图中E部)

(4) 粘性流動($T \gg T_g$, 線状ポリマーのみ)

ポリマー分子間の節目もすべるようになり, 粘性流動が生じる.

3.4 複合材料

3.4.1 応力-ひずみ曲線

母材が降伏するまでの弾性率は複合則で表記できる.

3.4.2 複合則

(1) 連続繊維強化複合材料
繊維方向(上限, 図3.13(a))

作用応力 σ の下で複合材料全体にひずみ ε が生じているとすると,

$$\begin{aligned} \sigma &= V_f \sigma_f + (1 - V_f) \sigma_m \\ &= E_f V_f \varepsilon + E_m (1 - V_f) \varepsilon \end{aligned} \quad (14)$$

よってヤング率は,

$$\begin{aligned} E_{comp} &= \frac{\sigma}{\varepsilon} = \\ &= E_f V_f + E_m (1 - V_f) \end{aligned} \quad (15)$$

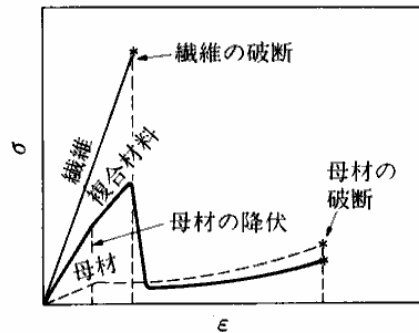


図3.12 連続繊維強化複合材料の応力-ひずみ曲線

表3.2 記号の説明

	体積率	応力	ひずみ	ヤング率
繊維	V_f	σ_f	ε_f	E_f
母材	$1 - V_f$	σ_m	ε_m	E_m
複合材料	1	σ	ε	E_{comp}

繊維垂直方向(下限, 図3.13(b))

作用応力 σ の下で複合材料全体にひずみ ε が生じているとすると,

$$\varepsilon = V_f \varepsilon_f + (1 - V_f) \varepsilon_m = V_f \sigma / E_f + (1 - V_f) \sigma / E_m \quad (16)$$

よってヤング率は,

$$E_{comp} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{V_f / E_f + (1 - V_f) / E_m} \quad (17)$$

(2) 粒子強化複合材料

- ・傾向として, 連続繊維強化複合材料の場合の下限に近いヤング率を示す.
- ・等方性であり, コスト的にも安い→充填材入ポリマー

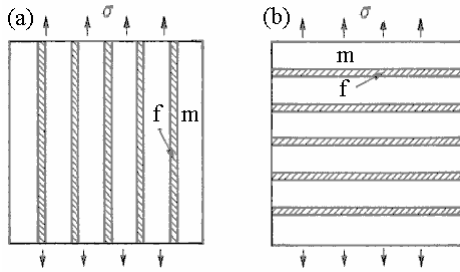


図3.13 連続繊維強化複合材料の異方性

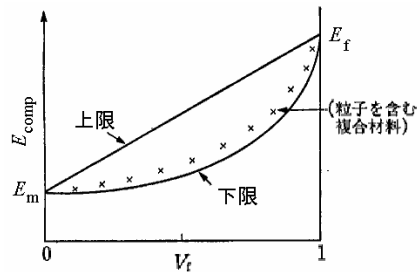


図3.14 複合材料のヤング率の強化繊維の体積率に対する依存性

3.5 ヤング率の比較

セラミックス

イオン結合・共有結合のため高ヤング率

金属

金属結合のため高-中程度のヤング率

ポリマー

2次結合の存在により低弾性率

複合材料

高ヤング率(強化材に依存)

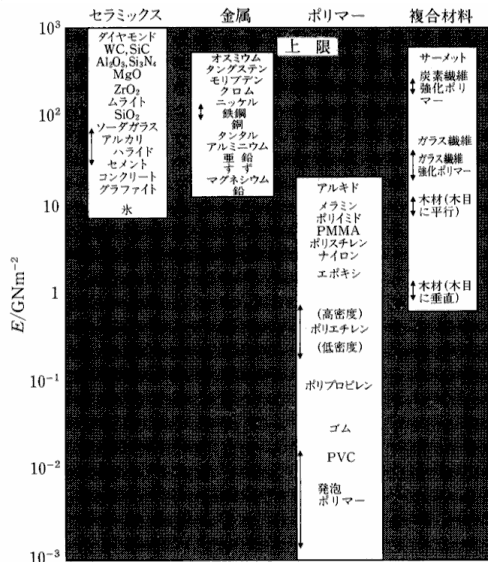


図3.15 工業材料のヤング率の比較

表3.3 種々の材料のヤング率

材料名	ヤング率(GPa)	材料名	ヤング率(GPa)
ダイヤモンド	1000	ニオブとその合金	80-110
炭化タングステン(WC)	450-650	ケイ素	107
オスミウム	551	ジルコニウムとその合金	96
Co-WCサーメット	400-530	シリカガラス(SiO ₂ 水晶)	94
チタン	110	亜鉛とその合金	43-96
ハフニウムのほう化物	450-500	金	82
炭化けい素(SiC)	430-445	カルサイト(大理石)	70-82
ホウ素	441	アルミニウム	69
タングステンとその合金	380-411	アルミニウム合金	69-79
アルミナ(Al ₂ O ₃)	385-392	銀	76
ベリリア(BeO)	375-385	ソーダガラス	69
炭化チタン(TiC)	370-380	アルカリハライド(LiFなど)	15-68
炭化タンタル(TaC)	360-375	花こう岩	62
モリブデンとその合金	320-365	スズとその合金	41-53
炭化ニオブ(NbC)	320-340	コンクリート・セメント	30-50
窒化ケイ素(Si ₃ N ₄)	280-310	ガラス	35-45
クロム	285-290	マグネシウムとその合金	41-45
ベリリウムとその合金	290-318	GFRP	7-45
マグネシア(MgO)	240-275	カルサイト(石灰石)	31
コバルトとその合金	200-248	黒鉛	27
ジルコニア(ZrO)	160-241	油頁岩	18
ニッケル	214	木材(木目に平行)	9-16
ニッケル合金	130-214	鉛とその合金	16-18
CFRP	70-270	アルキド	14-17
鉄	196	氷	9.1
鉄基超合金	193-214	メラミン	6-7
低合金鋼	200	ポリイミド	3-5
オーステナイトステンレス	190-200	ポリエステル	1.8-3.5
軟鋼	196	アクリル	1.6-3.4
鋳鉄	170-190	ナイロン	2.4
タンタルとその合金	150-186	PMMA	3.4
白金	172	ポリスチレン	3-3.4
ウラン	172	ポリカーボネート	2.6
ボロン繊維強化エポキシ	125	エポキシ	2.6-3
銅	124	木材(木目に垂直)	0.6-1.0
銅合金	120-150	ポリプロピレン	0.9
ムライト	145	PVC	0.2-0.8
ジルコニア(ZrO ₂)	145	ポリエチレン(高密度)	0.7
バナジウム	130	発泡ポリウレタン	0.01-0.06
チタン	116	ポリエチレン(低密度)	0.2
チタン合金	80-130	ゴム	0.01-0.1
パラジウム	124	発砲ポリマー	0.001-0.01
黄銅と青銅	103-124		

3.6 ケーススタディ

(1)天体望遠鏡

背景

19世紀までの天体望遠鏡の反射鏡は青銅製で、アイルランドの天文家Rosse伯爵(1800-1867)もこれを用いて渦巻き銀河を発見した。しかし、当時、直径1m以上の鏡は重すぎて作れなかった。今世紀に入ると、鏡として銀で被服したガラスが用いられるようになった。カリフォルニアのパロマ山にある世界最大級の天体反射望遠鏡(鏡の直径5m)では、ガラス製の鏡の厚さは1mに達し、その重量は70tである。この場合、ガラスはその力学的特性のために選択されている。すなわち、厚さわずか100nm(重量30g)の銀を70tものガラスを使って支えているのである。

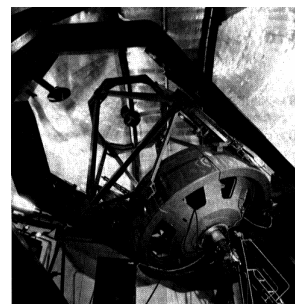


図3.16 マウナケア山(ハワイ)にある望遠鏡(直径3.8m)

問題

あなたは、その道では著名な中小企業の技師であり、直径5 mの大型反射鏡の設計を命じられた。その反射鏡の材料を選択せよ。鏡のたわみは焦点距離を変えて収差の原因となるため、自重による鏡中央のたわみは光の波長よりも小さくしなければならない。また、鏡を支える機構は鏡の重量の2乗に比例するため、材料は最軽量となるように選択する必要がある。なお、光学的に完全な鏡面を得るといった仕事は部下にまかせることにする。

検討

- ・鏡の単純化
円周部を支持された直径 $2a$ 、厚さ t の円板
- ・鏡の中心部のたわみ $\delta \leq$ 光の波長 ($1 \mu\text{m}$)
↓
油圧ジャッキ等により補正するが
それでも $\delta \leq 10 \mu\text{m}$ とする必要あり

条件： 直径 $2a=5 \text{ m}$ 、たわみ $\delta=10 \mu\text{m}$
で質量最小とする

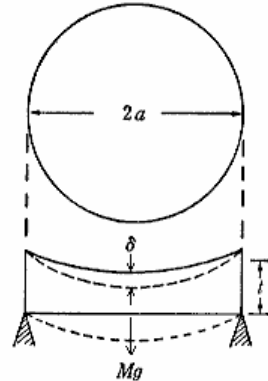


図3.17 望遠鏡の自重によるたわみ

質量は $M=\pi a^2 t \rho$ であり、ここで ρ は材料の密度とする。自重による鏡の中心部の弾性たわみを計算すると、

$$\delta = \frac{0.67}{\pi} \frac{Mga^2}{Et^3} \quad (18)$$

ここで、ポアソン比 $\nu=0.33$ 、 E はヤング率、 g は重力加速度である。 $t=M/\pi a^2 \rho$ を式(18)に代入すれば、

$$M = \sqrt{\frac{0.67g}{\delta}} \pi a^4 \sqrt{\frac{\rho^3}{E}} \quad (19)$$

よって、 M を最小とするには最小の $M_1=\rho^3/E$ を選択すればよい。ここで M_1 を材料指標(material index)と呼ぶ。

選定結果

計算結果を表3.4に示す。この表より、反射鏡に最適な材料はCFRPであり、ついで発泡ポリウレタンであることがわかる。木材は経年変化するため非現実的である。ガラスは鋼、アルミニウム、コンクリートよりも優れており(反射鏡の多くがガラス製である理由はここにある)、また鏡面仕上げも容易である。注目すべき点は、発泡ポリウレタンやCFRP製の反射鏡の重さはガラス製の

場合の約1/5であるため、鏡を支える構造物の費用はガラス製の鏡と比べて1/25ですむことである。さらに厚さに注目すると、ガラス製の鏡は約1 mの厚さ(実際でもこの程度の厚さ)である一方、CFRP製ではわずか0.38 mでよい。逆に発泡ポリウレタン製では非常に厚くしなければならない。発泡ポリウレタンが鏡の材料として優れていることに注目すれば、ガラスそのものを発泡化し、低密度で中実ガラスと同程度の安定性を有する材料として使用するという着想も得られる。

表3.4 直径5 m望遠鏡の鏡の支持材

材料	$E(\text{GPa})$	$\rho(\text{Mg/m}^3)$	$M_1(\text{Ns}^3/\text{m}^5)$	$M(\text{t})$	$t(\text{m})$
軟鋼	200	7.8	2.4	199	0.95
コンクリート	47	2.5	0.34	53	1.1
アルミニウム	69	2.7	0.28	50	0.95
ガラス	69	2.5	0.23	45	0.91
GFRP	40	2.0	0.20	42	1.0
木材	12	0.6	0.017	13	1.1
発泡ポリウレタン	0.06	0.1	0.017	12	6.8
CFRP	270	1.5	0.012	10	0.36

右図に示す密度とヤング率の関係図に指標 $M_1 = \text{const.}$ の直線を引いて考えると、全体を見通して考える際に有効である。

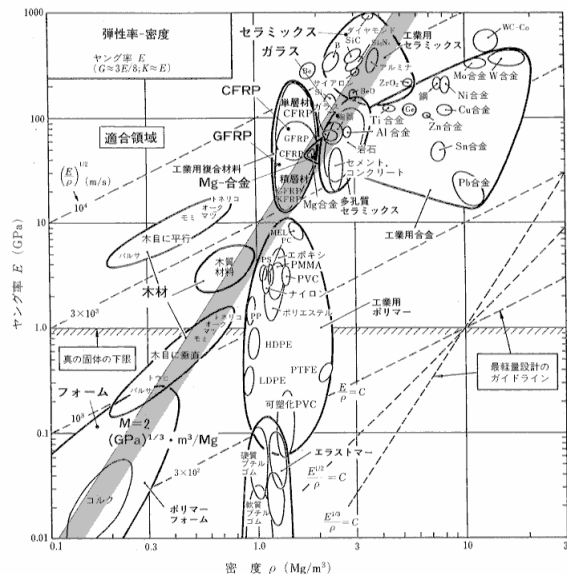


図3.18 密度とヤング率の関係

(2) 究極の自転車

問題2.1

あなたはツールドフランスでの優勝を目指す自転車競技チームの主任設計者である。一定剛性で最軽量の自転車フレーム用の材料を選択せよ。選定候補は、軟鋼、木材、アルミニウム合金、GFRP、チタン合金およびCFRPである。なお、フレームは円管とする。円管の直径 $2r$ はすでに決定されているが、円管の肉厚 t は自由である(ただし $t \ll r$)。

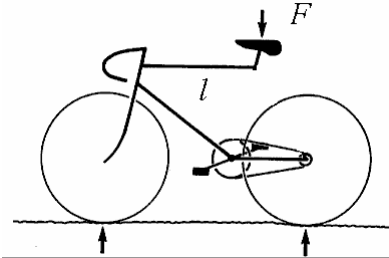


図3.19 レース用自転車

ヒント: フレームを長さ l の片持ちはりと見なすと、自由端に力 F が加わったときの変位量 δ は容易に計算できる。

問題2.2

チームはデコレーション用に問題2.1で設計した自転車のレプリカを作ることにした。この自転車は必要最低限の剛性があればよい。塗装を施すので材質は何でもよいが、目安として軟鋼、木材、アルミニウム合金、GFRP、チタン合金およびCFRPを候補とする。剛性一定で最も安価な自転車を与える材料

は何か。なお、材料費は質量 $M \times$ 単価 \bar{p} とし、加工賃等はとりあえず考えない。材料の単価は表3.5を参考にせよ。

表3.5 材料の単価

材料名	価格(US/ton)	材料名	価格(US/ton)
ダイヤモンド(工業用)	$6-9 \times 10^8$	白金	$1.8-2.25 \times 10^7$
金	$7.5-8.4 \times 10^6$	銀	$4.5-6.75 \times 10^5$
CFRP	$5.25-12 \times 10^4$	Co/WCサーメット	$5.55-7.5 \times 10^4$
タングステン	$1.95-2.25 \times 10^4$	コバルト合金	$2.4-3.6 \times 10^4$
チタン合金	$4.8-6.0 \times 10^4$	ニッケル合金	$7.6-9.0 \times 10^4$
ポリイミド	$3.3-3.75 \times 10^4$	SiC(ファイナセラミクス)	$2.25-3.75 \times 10^4$
マグネシウム合金	3300-4950	ナイロン66	3750-8100
ポリカーボネート	4125-4800	PMMA	2700-3750
マグネシア	7500-22500	アルミナ	12000-18000
工具鋼	1800-3000	GFRP	950-4500
ステンレス鋼	2700-3450	鋼(展伸材)	1800-1875
鋼(地金)	1725-1800	アルミニウム(展伸材)	1365-1800
アルミニウム(地金)	1365-1395	黄銅(展伸材)	1800-2100
黄銅(地金)	1650-2100	エポキシ	3750-4800
ポリエステル	1800-2700	ガラス	1020-1800
発泡ポリマー	1650-4500	亜鉛(展伸材)	1500-1950
亜鉛(地金)	1500-1650	鉛(展伸材)	825-1200
鉛(地金)	750-825	天然ゴム	675-2250
ポリプロピレン	750-1050	高密度ポリエチレン	825-900
ポリスチレン	900-1200	硬質木材	600-1500
低密度ポリエチレン	900-975	ポリ塩化ビニル	675-1800
合板	450-1500	低合金鋼	480-675
軟鋼(展伸材)	375-525	鑄鉄	300-525
鉄(地金)	270-300	軟質木材	150-450
強化コンクリート	192-270	燃料油	150-210
セメント	75-90	石炭	75-87

(3) タボリーノのテーブル

問題

家具デザイナーのルイージ・タボリーノは、強化ガラスの平板を細い丸棒の脚で支えた極端にシンプルで軽いテーブルをデザインしている。脚材は細くするため中実で、かつ移動を容易にするため軽くしたい。脚材はテーブルに重量物を載せても座屈してはならない。趣味のよい人々が購入するのでコストは度外視できる。どんな材料が最適であろうか。とりあえず、軟鋼、木材、アルミニウム合金、GFRP、チタン合金およびCFRPを候補とする。

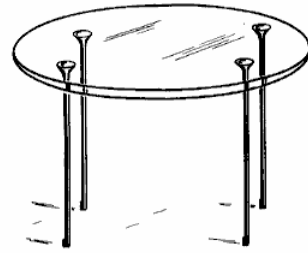


図3.20 タボリーノのテーブル

ヒント：脚は密度 ρ 、ヤング率 E の材料でできた細長い円柱とする。長さ l と最大荷重 P は決まっている。脚の質量 $m=\pi r^2 l \rho$ を最小にすることを考えればよい。脚の弾性座屈荷重 P_{crit} は次式で与えられる。

$$P_{crit} = \pi^2 EI / l^2 \quad (20)$$

ここで I は断面2次モーメントある。

(4)トラック用板ばね

問題

あなたは大手トラックメーカーでサスペンションの設計を担当している。会社は斜陽で、重役会議では高性能軽量トラックか、低コストのトラックを開発して、起死回生をはかることとなった。このトラックに使用する板ばねの材質を選択せよ。板ばねの長さ l と幅 b は変更できないが、厚さ t は自由に選択できるものとする。材料は、軟鋼、ガラス、アルミ合金、GFRP、チタン合金およびCFRPを候補とする。材料はいずれにおいても十分な強度を有すると考え、剛性のみを考えることにする。

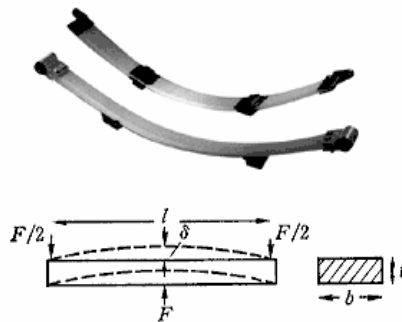


図3.21 板ばね

ヒント：板バネを図3.21に示すように両端支持はりと考える。ばねの価格は、ばねの質量 $M \times$ 単価 \bar{p} であり、製造にかかわるコストは無視する。